nur für $K' \geqq \frac{\pi \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{2}}$. Diese Bedingung ist für C nahe bei 1/2 erfüllt.

Eine FOURIER-Reihe für H lautet (BATEMAN [10], S. 345)

$$H(s) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda}} \frac{2\pi}{K s} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi}{K} \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \ln \frac{s}{s_1} \right) \right]$$

$$\text{mit} \quad D_n = \frac{e^{-\pi n K'/K}}{1-e^{-2\pi n K'/K}}$$

$$\text{und} \quad \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\, \tau + F(\Phi_0, k) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}} \ln \frac{s}{s_1}.$$

Die Reihe konvergiert für C nahe bei 1/2 sehr rasch.

Nichtlineare Elastizitätstheorie geradliniger Versetzungen

Von HANS PFLEIDERER, ALFRED SEEGER und EKKEHART KRÖNER

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart,
und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule, Stuttgart

(Z. Naturforschg. **15 a**, 758—772 [1960]; eingegangen am 29. März 1960)

Die Spannungsfunktionsmethode zur Lösung von Eigenspannungszuständen wird, ausgehend von der RIEMANN–CARTANschen Versetzungsgeometrie, in allgemeiner Form entwickelt. Die praktische Berechnung ebener Eigenspannungszustände in einem isotropen Medium im Rahmen der Elastizitätstheorie zweiter Ordnung wird im einzelnen dargestellt. Einfache Verhältnisse ergeben sich für kontinuierliche Verteilungen gerader paralleler Schrauben- oder Stufenversetzungen. Mit den dafür erhaltenen Formeln werden in quadratischer Näherung die Spannungsfelder singulärer Schrauben- und Stufenversetzungen berechnet, die in der Mittelachse hohler Kreiszylinder mit spannungsfreien Rändern liegen. Als Nebenergebnis erhalten wir die bekannte ZENERsche Formel für die mittlere Volumenaufweitung bei Eigenspannungen aus der quadratischen Elastizitätstheorie.

In einer vorangehenden Arbeit [1] ist dargelegt worden, welche Vorteile die *nichtlineare* Elastizitätstheorie für die Behandlung von Fehlstellen in Kristallen bietet und welche der linearen Elastizitätstheorie überhaupt nicht zugänglichen Probleme damit lösbar werden. Wie bei der linearen Elastizitätstheorie gibt es auch bei der nichtlinearen Theorie zwei zueinander komplementäre Rechenmethoden: Erstens lassen sich *Verschiebungen* einführen und so die Kompatibilitätsbedingungen identisch erfüllen. Die zu lösenden Gleichungen sind dann die in den Verschiebungen ausgedrückten *Gleichgewichtsbedingungen*. Zweitens kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch einen Spannungsfunktionsansatz befriedigen, was allerdings nur möglich ist, wenn keine Massenkräfte ohne Potential und keine Trägheitskräfte zu berücksichtigen sind. Die Differentialgleichungen des Problems, denen die *Spannungsfunktionen* genügen müssen, sind dann die *Kompatibilitätsbedingungen* oder, bei Eigenspannungen, deren Verallgemeinerung.

Die uns in der Physik der Gitterfehler interessierenden Probleme sind so beschaffen, daß je nach Fragestellung einer der oben bezeichneten beiden Wege günstiger als der andere oder nur allein gangbar ist. Will man beispielsweise die Streuung elastischer Wellen an Fehlstellen, etwa Versetzungen, behandeln, so ist wegen der Trägheitsglieder das Rechnen mit Verschiebungen — jedenfalls bis jetzt — unvermeidlich. Bei statischen Eigenspannungsproblemen dagegen ist, wie auch schon in der linearen Theorie [2], die Benützung von Spannungsfunktionen sehr zweckmäßig. Dieses Verfahren ist sogar unentbehrlich, wenn kontinuierlich verteilte Versetzungen, die ja die elementaren Eigenspannungsquellen sind, behandelt werden sollen.

Die Grundlagen für die *Verschiebungsmethode* hat MURNAGHAN [3] ausgearbeitet. In sog. quadratischer Näherung ist damit ein verhältnismäßig einfaches Versetzungs-Randwertproblem, nämlich eine Schraubenversetzung in einem Hohlzylinder, gelöst worden [1]. Die Anwendung dieser Methode auf die Streuung elastischer Wellen an Fehlstellen, die sich besonders im Hinblick auf Probleme der Wärmeleitung durch Gitterschwingungen als sehr fruchtbar erwiesen hat, wird an anderer Stelle gegeben werden. Je nach Zweckmäßigkeit lassen sich die Verschiebungen als Funktionen des unverformten Anfangs- oder

[1] A. SEEGER u. E. MANN, Z. Naturforschg. **14 a**, 154 [1959].
[2] E. KRÖNER, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
[3] F. D. MURNAGHAN, Finite Deformation of an Elastic Solid, J. Wiley & Sons, New York 1951.

des verformten Endzustands beschreiben. Dementsprechend kann man auch den bei einem bestimmten Problem verwendeten Verzerrungstensor auf Anfangs- oder Endkoordinaten beziehen.

Die Anwendung der *Spannungsfunktionsmethode* auf nichtlineare Versetzungsprobleme haben KRÖNER und SEEGER [4] gegeben. Wir stellen dazu zwei Gesichtspunkte heraus: 1. Da die Gleichgewichtsbedingungen für den Endzustand gelten, ist diese Methode für solche Probleme besonders geeignet, die sich in Endkoordinaten einfacher formulieren lassen. Die Verschiebungen treten hierbei gar nicht explizit auf. 2. Während die MURNAGHANsche Theorie mit elementargeometrischen Betrachtungen auskommt, benützt die Spannungsfunktionsmethode Begriffe der höheren Geometrie, insbesondere das Verschwinden des Krümmungstensors als Ausdruck der Euklidizität des verformten Zustands und die Cartansche Torsion als Maß für die Versetzungsdichte. Dank der Arbeiten verschiedener Schulen (siehe die Zusammenfassungen von KONDO [5], BILBY [6] und KRÖNER [7]) liegt diese RIEMANN–CARTANsche Geometrie in abgerundeter Form vor. Für die Auswertung der sich daraus für die Eigenspannungsbestimmung ergebenden Tensorformeln (Ziffer 3), welche für allgemeine Koordinaten gelten, wird diese Geometrie jedoch nicht mehr benötigt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Spannungsfunktionsmethode auf ein isotropes Medium in quadratischer Näherung angewendet; wir benützen also eine quadratische Spannungs – Dehnungs-Beziehung. Zu den aus der linearen Theorie bekannten beiden elastischen Konstanten kommen dabei noch drei weitere Konstanten „dritter Ordnung" hinzu. Die sich zu deren experimenteller Bestimmung anbietenden Möglichkeiten sind von SEEGER und MANN [1] kurz besprochen worden.

In Ziffer 1 wird zunächst die in der MURNAGHANschen Theorie benützte Spannungs – Energie-Beziehung nach der Verzerrung aufgelöst und damit die quadratische Spannungs – Dehnungs-Beziehung (d. h. der Spannungstensor als Funktion des Dehnungstensors betrachtet) in eine Dehnungs – Spannungs-Beziehung umgeschrieben. Dabei ergibt sich die Gelegenheit, einen früher [4] unterlaufenen Fehler zu verbessern. In Ziff. 2 wird unter Verwendung eines Satzes von ALBENGA [8] über Eigenspannungszustände die bekannte ZENERsche Formel für die durchschnittliche Dilatation eines elastischen Körpers aus den Grundformeln der quadratischen Elastizitätstheorie abgeleitet, während ZENER [9] ja ursprünglich einen ganz anderen Beweisweg benutzt hatte. Als Ziff. 3 schieben wir eine kurze Zusammenstellung der zur Eigenspannungsbestimmung nach KRÖNER und SEEGER [4] benötigten Grundformeln ein. In Ziff. 4 werden diese auf ebene Zustände spezialisiert und für allgemeine Zylinderkoordinaten explizit angegeben. Diese Formeln bilden später die Grundlage für die Lösung von Randwertproblemen mit geradlinigen Versetzungen. Ziff. 5 spezialisiert die Formeln von Ziff. 4 weiter auf den Fall kontinuierlicher Verteilungen geradliniger Schraubenversetzungen. Ziff. 6 löst das spezielle Randwertproblem einer Schraubenversetzung, die sich konzentrisch in einem hohlen Kreiszylinder befindet, wobei die Übereinstimmung mit dem mit der Verschiebungsmethode erhaltenen Ergebnis nachgeprüft und bestätigt wird. Ziff. 7 gibt die allgemeinen Formeln für kontinuierliche Verteilungen von geraden parallelen Stufenversetzungen an. Mit deren Hilfe werden in Ziff. 8 die Spannungskomponenten für eine Stufenversetzung, die in der Achse eines hohlen Kreiszylinders verläuft, in quadratischer Näherung berechnet. Es handelt sich hierbei um ein ziemlich kompliziertes Problem, dessen Lösung schon in der linearen Theorie einen gewissen mathematischen Aufwand erfordert. Als nichtlineares Problem wäre es wohl mit der Verschiebungsmethode praktisch überhaupt nicht zu lösen. Es zeigen sich hier sehr deutlich die schon eingangs erwähnten Vorzüge der Spannungsfunktionsmethode, die diesem und ähnlichen Problemen bestens angepaßt ist. Schließlich bringen wir im Anhang einige mathematische Erläuterungen, mit denen wir den laufenden Text nicht belasten wollen, insbesondere die hier vorkommende Anwendung des RICCI-Kalküls.

[4] E. KRÖNER u. A. SEEGER, Arch. Rat. Mech. Anal. **3**, 97 [1959].

[5] K. KONDO, Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry. Band I u. II, Tokyo: Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai 1955 u. 1958.

[6] B. A. BILBY, Continuous Distributions of Dislocations, Progress in Solid Mechanics **1**, 329 [1960].

[7] E. KRÖNER, Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Arch. Rat. Mech. Anal. **4**, 273 [1960].

[8] G. ALBENGA, Atti Accad. Sci., Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **54**, 864 [1918/19].

[9] C. ZENER, Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng. **147**, 361 [1942].

1. Die Dehnungs–Spannungs-Beziehung

Zur Kennzeichnung der Deformation verwenden wir den auf den deformierten (= End-) Zustand bezogenen (d. h. EULERschen) Verzerrungstensor. Dieser wird in der nichtlinearen Elastizitätstheorie wie folgt eingeführt: Es sei $\mathrm{d}s_0$ der Abstand zweier Punkte im sogen. natürlichen Zustand (s. Ziff. 3), $\mathrm{d}s$ der Abstand *derselben* Punkte im deformierten Zustand. Durch $\mathrm{d}s_0{}^2 = g_{kl}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l$ bzw. $\mathrm{d}s^2 = a_{kl}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l$ (Summationskonvention!) werden dann die Maßtensoren des natürlichen bzw. deformierten Zustands definiert. Dabei soll durch $\mathrm{d}x^k$ die gegenseitige Lage der betreffenden Punkte im Endzustand beschrieben sein. Der EULERsche Verzerrungstensor ist dann definitionsgemäß gleich

$$\varepsilon_{kl} = \tfrac{1}{2}(a_{kl} - g_{kl}). \tag{1}$$

Hierfür schreiben wir symbolisch auch

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}), \tag{1'}$$

wo $\boldsymbol{I}$ der Einheitstensor zweiter Stufe ist. Im Falle infinitesimaler Verformung wird $\boldsymbol{\epsilon}$ mit dem in der linearen Theorie benützten Verzerrungstensor identisch.

Für eine Zwischenrechnung werden wir ferner den HENCKYschen logarithmischen Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{h} = -\tfrac{1}{2}\ln \boldsymbol{g} = -\tfrac{1}{2}\ln(\boldsymbol{I} - 2\,\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2 + \dots \tag{2}$$

brauchen.

Um die Spannungs – Dehnungs-Beziehungen der Theorie zweiter Ordnung explizit zu erhalten, geht man nach MURNAGHAN [10] von dem folgenden Ansatz für die auf das Anfangsvolumen bezogene Verzerrungsenergiedichte $\psi(\boldsymbol{\epsilon})$ aus; da ψ ein Skalar ist, dürfen für ein isotropes Medium nur die Invarianten von $\boldsymbol{\epsilon}$ eingehen: ε_{I} = Spur, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ = Summe der Unterdeterminanten der Diagonalelemente und $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ = Determinante der Matrix, wenn wir die gemischtvarianten Komponenten von $\boldsymbol{\epsilon}$ ins Auge fassen.

$$\psi = j\,\varepsilon_{\mathrm{I}}{}^2 + k\,\varepsilon_{\mathrm{II}} + l'\,\varepsilon_{\mathrm{I}}{}^3 + m'\,\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{II}} + n'\,\varepsilon_{\mathrm{III}}. \tag{3}$$

Das ist eine nach den Gliedern dritter Ordnung abgebrochene Reihenentwicklung. Das Glied erster Ordnung fehlt aus Stabilitätsgründen. Die Konstanten j und k sind aus der linearen Theorie bekannt: $j = \lambda/2 + \mu$, $k = -2\,\mu$, $\lambda = 2\,\nu\mu/(1-2\,\nu)$, μ = Schubmodul, ν = Querkontraktionszahl. l', m' und n' sind die durch (3) definierten Elastizitätskonstanten dritter Ordnung [11].

Aus der Energiedichte ψ errechnet sich der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ (s. Arbeiten Anm. [10, 12]) als

$$\sigma_j{}^i = \frac{\varrho}{\varrho_0}\,(\delta_k{}^i - 2\,\varepsilon_k{}^i)\,\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_k{}^j} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\,\frac{\partial\psi}{\partial h_i{}^j}. \tag{4}$$

Hierbei ist ϱ bzw. ϱ_0 die Dichte des Körpers im End- bzw. Anfangszustand, $\delta_k{}^i$ das KRONECKER-Symbol und

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}V} = \sqrt{1 - 2\,\varepsilon_{\mathrm{I}} + 4\,\varepsilon_{\mathrm{II}} - 8\,\varepsilon_{\mathrm{III}}}, \tag{5}$$

wenn $\mathrm{d}V$ das Volumenelement im Endzustand, $\mathrm{d}V_0$ dasjenige im Anfangszustand darstellt.

Aus (4), (3) und (5) folgt, sofern wir nur Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigen,

$$\boldsymbol{\sigma} = (c_1\,\varepsilon_{\mathrm{I}} + c_2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}{}^2 + c_3{}'\,\varepsilon_{\mathrm{II}})\,\boldsymbol{I} + (c_4 + c_5{}'\,\varepsilon_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{\epsilon} + c_6{}'\,\boldsymbol{\epsilon}^2 + c_7{}'\,\varepsilon_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\epsilon}^{-1}.$$

Hier sind die $c_1, c_2 \dots$ Konstante. Zwischen $c_3{}'$, $c_5{}'$, $c_6{}'$ und $c_7{}'$ muß wegen der CAYLEY–HAMILTONschen Gleichung $\boldsymbol{\epsilon}^2 - \varepsilon_{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{\epsilon} + \varepsilon_{\mathrm{II}}\,\boldsymbol{I} - \varepsilon_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\epsilon}^{-1} = 0$ eine Beziehung bestehen. Wir eliminieren $c_6{}'$ und erhalten

$$\boldsymbol{\sigma} = (c_1\,\varepsilon_{\mathrm{I}} + c_2\,\varepsilon_{\mathrm{I}}{}^2 + c_3\,\varepsilon_{\mathrm{II}})\,\boldsymbol{I} + (c_4 + c_5\,\varepsilon_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{\epsilon} + c_7\,\varepsilon_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\epsilon}^{-1} \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda, & c_4 &= 2\,\mu,\\ c_2 &= -\lambda + 3\,l' + m', & c_5 &= -(2\,\lambda + 6\,\mu + m'),\\ c_3 &= 4\,\mu + m', & c_7 &= -4\,\mu + n'. \end{aligned}$$

Da in (3) nur 5 Konstante vorkommen, können die 6 Konstanten in (6) nicht voneinander unabhängig sein:

$$c_3 + c_5 = -(2\,c_1 + c_4) = -2(\lambda + \mu). \tag{7}$$

Das Dehnungs – Spannungsgesetz $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ hat dieselbe Form wie (6). Zwischen den dabei auftretenden Konstanten muß eine Beziehung analog (7) bestehen, die wir jetzt bestimmen wollen.

Nach (4) ist $\delta\psi = \frac{\varrho_0}{\varrho}\,\sigma_j{}^i\,\delta h_i{}^j$. Wir machen nun eine LEGENDRE-Transformation und führen zu diesem Zweck die Funktion

$$\Omega = \frac{\varrho_0}{\varrho}\,\sigma_j{}^i\,h_i{}^j - \psi \tag{8}$$

[10] F. D. MURNAGHAN, Amer. J. Math. **59**, 235 [1937].

[11] Die schon früher [3, 1] benützten und als l, m, n bezeichneten Konstanten dritter Ordnung hängen mit den hier gebrauchten folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} l &= -2\,\lambda + 3\,l' + m', & l' &= 2(\lambda + 2\,\mu) + (l + 2\,m)/3,\\ m &= -2(\lambda + 3\,\mu) - m'/2, & m' &= -4(\lambda + 3\,\mu) - 2\,m,\\ n &= -12\,\mu + n', & n' &= 12\,\mu + n. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen sind in einer früheren Arbeit [1] zum Teil unrichtig wiedergegeben worden.

[12] C. TRUESDELL, J. Rat. Mech. Anal. **1**, 125 [1952].

ein. Es ergibt sich $\delta\Omega = h_i^j\, \delta\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\,\sigma_j^i\right)$ und

$$h_i^j = \frac{\partial \Omega}{\partial\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\,\sigma_j^i\right)} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_j^i} - h_k^l\,\sigma_l^k\,\frac{\partial\,\frac{\varrho_0}{\varrho}}{\partial\sigma_j^i}\right], \quad (9)$$

was als Umkehrung von (4) aufzufassen ist.

Für Ω machen wir den zu (3) analogen Ansatz

$$\Omega = J\,\sigma_{\mathrm{I}}^2 + K\,\sigma_{\mathrm{II}} + L\,\sigma_{\mathrm{I}}^3 + M\,\sigma_{\mathrm{I}}\,\sigma_{\mathrm{II}} + N\,\sigma_{\mathrm{III}}\,. \quad (10)$$

In der linearen Theorie ist $\psi = \frac{1}{2}\,\sigma_j^i\,\varepsilon_i^j$, ferner nach (2) $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\epsilon}$ und nach (8) $\Omega = 2\,\psi - \psi = \psi$. Die Konstanten J und K in (10) sind also aus der linearen Theorie bekannt, nämlich $J = \frac{1}{2E}$ (E = Elastizitätsmodul) und $K = -\frac{1}{2\mu}$, während L, M und N durch (10) definiert sind. Falls nur Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt werden, folgt aus (2), (9), (10) und (5)

$$\varepsilon_j^i = \left(1 - \frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{3\,\varkappa}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_i^j} - \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_k^j}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_i^k} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\varkappa}\,(J\,\sigma_{\mathrm{I}}^2 + K\,\sigma_{\mathrm{II}})\,\delta_j^i$$

mit $\varkappa = E/3(1-2\,\nu)$ als Kompressionsmodul, und weiter

$$\boldsymbol{\epsilon} = (C_1\,\sigma_{\mathrm{I}} + C_2\,\sigma_{\mathrm{I}}^2 + C_3\,\sigma_{\mathrm{II}})\,\boldsymbol{I} + (C_4 + C_5\,\sigma_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{\sigma} + C_7\,\sigma_{\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\sigma}^{-1} \quad (11)$$

mit

$$C_1 = -\nu/E\,, \qquad C_4 = 1/2\,\mu\,,$$

$$C_2 = \frac{1}{E^2}\,[3\,\nu(1-\nu) - 1] + 3\,L + M\,, \qquad C_5 = \frac{3\,\nu - 2}{2\,\mu\,E} - M\,,$$

$$C_3 = \frac{3(1-\nu)}{2\,\mu\,E} + M\,, \qquad C_7 = -\frac{1}{4\,\mu^2} + N\,.$$

Offenbar ist

$$C_3 + C_5 = C_4(C_1 + C_4) = \frac{1}{2\,\mu\,E} \quad (12)$$

die gesuchte Beziehung.

Als Elastizitätskonstanten dritter Ordnung kommen sowohl l', m', n' von (3) als auch die L, M, N von (10) in Frage. Einsetzen von (6) in (11) liefert

$$3\,\varkappa^2(27\,L + 9\,M + N) + \frac{1}{9\,\varkappa}\,(27\,l' + 9\,m' + n') = 4\,,$$

$$2\,\mu^2(3\,M + N) + \frac{1}{6\,\varkappa}\,(3\,m' + n') = -3\,\frac{(2-3\,\nu)}{(1+\nu)}\,,$$

$$8\,\mu^2\,N + \frac{n'}{\mu} = 6\,. \quad (13)$$

Die Gln. (52) und (54) bei Kröner und Seeger [4] sind durch (10) und (11) zu ersetzen.

2. Lokale und mittlere Dilatation. Ableitung der Zenerschen Formel

Die elastischen Konstanten λ, μ, l', m', n' eines isotropen Körpers können auch von einem durch den Druck p vorverformten Zustand aus gemessen werden. Sie sind dann Funktionen dieser Vorverformung und der elastischen Konstanten für $p=0$. Bei Brillouin [13] sind diese Funktionen unter der Voraussetzung angegeben, daß (3) für die Gesamtverformung gilt. Für verschwindendes p ist diese Voraussetzung erfüllbar und die Vorverformung darf durch das lineare Hookesche Gesetz in p ausgedrückt werden. Wir können dann den Kompressionsmodul $\varkappa$ und den Schubmodul μ nach p ableiten und bekommen unter Beachtung von (13)

$$\varkappa' \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\varkappa}{\mathrm{d}p}\right|_{p\to 0} = 3\,\varkappa^2(27\,L + 9\,M + N) - \frac{1}{9\,\varkappa}\,(27\,l' + 9\,m' + n')\,,$$

$$\mu' \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}p}\right|_{p\to 0} = -\,[\mu/\varkappa + 2\,\mu^2(3\,M + N)]\,. \quad (14)$$

Die Elastizitätskonstanten auf den rechten Seiten dieser Formeln gelten für $p=0$. Die auf den Endzustand bezogene Dilatation Θ ist nach (5) in zweiter Näherung

$$\Theta = (\mathrm{d}V - \mathrm{d}V_0)/\mathrm{d}V = 1 - \mathrm{d}V_0/\mathrm{d}V = \varepsilon_{\mathrm{I}} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}^2 - 2\,\varepsilon_{\mathrm{II}}\,. \quad (15)$$

Wegen (11) und (14) können wir (15) auch in der Form

$$\Theta = s_1\,\sigma_{\mathrm{I}} + s_2\,\sigma_{\mathrm{I}}^2 + s_3\,\sigma_{\mathrm{II}} \quad (16)$$

schreiben, wobei

$$s_1 = \frac{1}{3\,\varkappa}\,,$$

$$s_2 = \frac{3}{2}\,\frac{1}{E^2}\,[4\,\nu(2-\nu) - 3] + 9\,L + 2\,M = \frac{1}{18\,\varkappa^2}\,(\varkappa' - 1) + \frac{1}{6\,\mu^2}\left(\mu' - \frac{\mu}{\varkappa}\right),$$

$$s_3 = \frac{1}{\mu\,\varkappa} + 3\,M + N = -\frac{1}{2\,\mu^2}\left(\mu' - \frac{\mu}{\varkappa}\right)$$

ist. (16) gilt für einen beliebigen Spannungszustand. Da wir uns hier für Eigenspannungen interessieren, ist es zweckmäßig, einen Satz von Albenga [8] mit in

[13] L. Brillouin, Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité, Masson & Cie, Paris 1949.

Betracht zu ziehen: Aus Gleichgewichtsgründen gilt (bei beliebiger Anisotropie) für einen Körper mit Eigenspannungen

$$\int \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V = 0 . \tag{17}$$

Zu integrieren ist über das ganze Volumen. Gl. (17) führt zu einer Vereinfachung, wenn wir die über das ganze Volumen gemittelte Dilatation Θ eines Körpers mit Eigenspannungen nach (16) bilden, weil nämlich $\bar{\sigma}_{\mathrm{I}} = 0$ ist [2].

Wir teilen nun die Energiedichte der linearen Elastizitätstheorie, d. h. (10) ohne die Glieder dritter Ordnung, in Dilatationsenergie E_{d} und Scherenergie E_{s} auf:

$$\begin{gathered} \psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{I}}^2}{E} - \frac{\sigma_{\mathrm{II}}}{\mu}\right) = E_{\mathrm{d}} + E_{\mathrm{s}} , \\ E_{\mathrm{d}} = \frac{\sigma_{\mathrm{I}}^2}{18\,\varkappa} , \quad E_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2\,\mu}\left(\frac{1}{3}\,\sigma_{\mathrm{I}}^2 - \sigma_{\mathrm{II}}\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Aus (16), (17) und (18) folgt dann

$$\Theta = s_2\, \overline{\sigma_{\mathrm{I}}^2} + s_3\, \overline{\sigma_{\mathrm{II}}} = \frac{1}{\varkappa}\,(\varkappa' - 1)\, E_{\mathrm{d}} + \frac{1}{\mu}\left(\mu' - \frac{\mu}{\varkappa}\right) E_{\mathrm{s}} . \tag{19}$$

Das ist die von ZENER [9] mit zum Teil thermodynamischer Begründung abgeleitete Formel. Die verhältnismäßig gut meßbaren Größen $\varkappa'$ und μ' vertreten in ihr die Elastizitätskonstanten dritter Ordnung. Einige Werte für $\varkappa'$ und μ' sind bei SEEGER und HAASEN [14] zusammengestellt.

3. Die Grundformeln der Eigenspannungsbestimmung nach Kröner und Seeger

Die *statischen* Grundgleichungen, das sind die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen [15]

$$\nabla_i\, \sigma^{ij} = 0 , \tag{20}$$

werden durch den Spannungsfunktionsansatz

$$\sigma^{ij} = -\in^{jnm} \in^{ilk} \nabla_n \nabla_l\, \chi_{mk} \tag{21}$$

identisch befriedigt. Hier ist ∇_i das Symbol der kovarianten Differentiation bezüglich der Metrik a_{kl} des deformierten Zustands und $\in^{ilk}$ der total antisymmetrische LEVI–CIVITA-Tensor. Eine Erläuterung dieser Begriffe bringt der Anhang.

Die *geometrischen* Gleichungen, welche die Bedingungen für den Zusammenhalt des Körpers mit Eigenspannungen darstellen, bezeichnen wir als *Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung.* Sie lassen sich wie folgt formulieren: Der RIEMANNsche Krümmungstensor Γ_{nmlk} bzw. – gleichwertig – der EINSTEIN-Tensor Γ^{ij} des sog. *natürlichen* Zustands muß verschwinden. Wegen des nicht ganz einfachen Begriffs „natürlicher Zustand“ sei auf Anm. [6] oder Anm. [7] verwiesen. Ist g_{kl} die Metrik dieses Zustands (beschrieben in den Koordinaten des Endzustands), so ist

$$\tfrac{1}{2}(a_{kl} - g_{kl}) = \varepsilon_{kl} \tag{1}$$

der EULERsche, d. h. auf den Endzustand bezogene, Deformationstensor des Körpers mit Eigenspannungen. Mit den Abkürzungen

$$\varepsilon_{mlk} = \tfrac{1}{2}(\nabla_m\, \varepsilon_{kl} + \nabla_l\, \varepsilon_{mk} - \nabla_k\, \varepsilon_{lm}) \quad \text{und}$$

$$h_{mlk} = -\tfrac{1}{2}(\in_{mlp}\, \alpha^{p}_{\cdot k} + \in_{kmp}\, \alpha^{p}_{\cdot l} - \in_{lkp}\, \alpha^{p}_{\cdot m})$$

erhält man die Grundgleichungen in der Form $(g^{pq}\, g_{qr} = \delta_r{}^p)$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(ij)} = \tfrac{1}{2}\,\{\in^{jnm} \in^{ilk} [\nabla_n(-2\,\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}) \\ - g^{pq}(-2\,\varepsilon_{nkq} + h_{nkq})\,(-2\,\varepsilon_{mlp} + h_{mlp})]\}_{(ij)} = 0 , \end{aligned} \tag{22}$$

wobei durch das Symbol (ij) angezeigt ist, daß der symmetrische Teil bezüglich der Indizes i, j zu nehmen ist. $\alpha^{k}_{\cdot l}$ ist der als gegeben zu betrachtende Tensor der Versetzungsdichte [16], in dem k den Linienverlauf und l die Richtung des BURGERS-Vektors charakterisiert.

Wir ersetzen nun in (22) die Deformationen ε_{kl} mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes durch die Spannungen, diese dann gemäß (21) durch die Spannungsfunktionen. Falls wir letztere, bei Beschränkung auf den isotropen Fall, noch den zulässigen Nebenbedingungen

$$\nabla_i\left(\chi^{ij} - \frac{\nu}{1+2\,\nu}\,\chi_{\mathrm{I}}\, a^{ij}\right) = 0 \tag{23}$$

unterwerfen, bekommen wir die nur noch Spannungsfunktionen und Versetzungsdichte enthaltende Form der Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung

$$\nabla^4 \chi^{ij} = \eta'^{ij}(\chi^{kl}, \alpha^{k}_{\cdot l}) ; \tag{24}$$

[14] A. SEEGER u. P. HAASEN, Phil. Mag. 3, 470 [1958].

[15] Alle folgenden Gleichungen sind in Endkoordinaten geschrieben.

[16] Die Versetzungsdichte kann nicht beliebig vorgegeben werden, sondern sie muß die Bedingung des Nicht-Aufhörens der Versetzungslinien im Körper erfüllen. Diese Bedingung ist mit dem Verschwinden des antisymmetrischen Teils des EINSTEIN-Tensors identisch und schreibt sich [4]

$$\nabla_n\, \alpha^{n}_{\cdot\cdot k} = g^{pq}(-2\,\varepsilon_{nkq} + h_{nkq})\, \alpha^{n}_{\cdot\cdot p} .$$

Bei physikalisch vernünftig ausgedachten Versetzungsdichten ist diese Bedingung im allgemeinen a priori erfüllt. Vgl. auch Anm. [2, 7].

$$\eta'^{ij} \equiv 2\,\mu\left(\eta^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\,\eta_{\mathrm{I}}\,a^{ij}\right), \qquad \eta^{ij} \equiv \eta_0{}^{ij} + P^{ij} + Q^{ij}. \tag{25}$$

Hier ist
$$\nabla^4 \equiv \nabla^k\,\nabla_k\,\nabla^l\,\nabla_l \tag{26}$$
der biharmonische Differentialoperator und
$$\eta_0{}^{ij} \equiv -\,(\in^{jnm}\nabla_n\,\alpha^i_{\cdot m})_{(ij)} \tag{27}$$
$$= -\,(\in^{jnm}\in^{ilk}\nabla_n\,\nabla_l\,\varepsilon^0_{mk})$$
der bekannte Zusammenhang zwischen der Versetzungsdichte und der Inkompatibilität des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}^0$ der linearen Näherung. Ferner gilt
$$P^{ij} \equiv \in^{jnm}\in^{ilk}\nabla_n\,\nabla_l\,\varepsilon^Q_{mk}, \tag{28}$$
wenn die ε^Q_{kl} denjenigen Teil der Deformation darstellen, der aus den Spannungen σ^{ij} durch Anwendung des nicht-linearen Anteils des Elastizitätsgesetzes folgt. Schließlich ist
$$\begin{aligned} Q^{ij} &\equiv \tfrac{1}{2}(\in^{jnm}\in^{ilk} g^{pq}\,\Gamma_{nkq}\,\Gamma_{mlp})_{(ij)}, \\ \Gamma_{mlk} &\equiv -2\,\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}. \end{aligned} \tag{29}$$

Die Gl. (24) haben wir in einer Form geschrieben, die sich als Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren besonders eignet. Wir berechnen aus diesen Gleichungen zunächst die lineare Näherung $\chi_0{}^{ij}$, indem wir $P_0{}^{ij} = Q_0{}^{ij} = 0$ setzen. Damit geht (24) in die bekannte Gleichung der linearen Theorie [2]
$$\nabla^4\,\chi_0{}^{ij} = \eta_0{}'^{ij} \tag{30}$$
über. Die mit Hilfe von (21) und (11) aus $\chi_0{}^{ij}$ berechneten Näherungen [17] für P^{ij} und Q^{ij} nennen wir $P_1{}^{ij}$ und $Q_1{}^{ij}$. Hiernach bestimmen wir $\chi_1{}^{ij}$ aus der Gleichung
$$\nabla^4\,\chi_1{}^{ij} = \eta_1{}'^{ij}, \qquad \eta_1{}^{ij} \equiv P_1{}^{ij} + Q_1{}^{ij}. \tag{31}$$
Im Rahmen der quadratischen Theorie ist dann
$$\chi^{ij} = \chi_0{}^{ij} + \chi_1{}^{ij} \tag{32}$$
der gesuchte Spannungsfunktionstensor, aus dem gemäß (21) die Spannungen folgen. In N-ter Näherung wäre $\chi^{ij} = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n{}^{ij}$, wobei die $\chi_n{}^{ij}$ aus der inhomogenen Bipotentialgleichung
$$\nabla^4\,\chi_n{}^{ij} = \eta_n{}'^{ij}, \qquad \eta_n{}^{ij} \equiv P_n{}^{ij} + Q_n{}^{ij} \tag{33}$$
folgen.

Will man irgendwelche Randbedingungen erfüllen, so genügt es, bemerkenswerterweise, dies im letzten Näherungsschritt zu tun.

Genau genommen haben wir bei der Lösung von (24) auch auf die Nebenbedingungen (23) zu achten. Im Falle unendlich ausgedehnter Medien lösen indessen die Integrale
$$\chi^{ij}(\mathfrak{r}) = -\frac{1}{8\pi}\iiint \eta'^{ij}(\mathfrak{r}')\,|\,\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'\,|\,\mathrm{d}V'$$
zugleich die Gln. (23) und (24). Die Berücksichtigung der Nebenbedingungen (23) im Falle des Summationsproblems endlicher Körper ist nicht schwierig. Wegen einer eingehenderen Diskussion vergleiche man Anm. [2] und Anm. [7]. Bei der in den folgenden Ziffern beschriebenen Anwendung auf das ebene Problem sind die Nebenbedingungen stets identisch erfüllt.

4. Der ebene Eigenspannungszustand in krummlinigen Koordinaten

Wir benützen zur Beschreibung des Endzustands beliebige orthogonale Zylinderkordinaten x^1, x^2, $x_3 = z$. Der zugehörige Maßtensor [18] hat die Form
$$a_{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$
Für den ebenen, von z unabhängigen Zustand ist $\nabla_3 = \partial_3 = 0$. Damit und mit $a = |\,a_{kl}\,|$ schreibt sich der Spannungsfunktionsansatz (21)

$$\sigma^{33} = -\frac{1}{a}\,(\nabla_1\nabla_1\chi_{22} - 2\,\nabla_1\nabla_2\chi_{12} + \nabla_2\nabla_2\chi_{11}) = \sigma_{33}, \tag{35'}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= \frac{1}{a}\,(\nabla_1\nabla_1\chi_{23} - \nabla_1\nabla_2\chi_{13}) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\nabla_1\,\Phi = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\partial_1\,\Phi, \\ \sigma^{13} &= -\frac{1}{a}\,(\nabla_2\nabla_1\chi_{23} - \nabla_2\nabla_2\chi_{13}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\nabla_2\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\partial_2\,\Phi, \end{aligned} \tag{35''}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= -\frac{1}{a}\,\nabla_2\nabla_2\chi_{33} = \frac{1}{a}\,\nabla_2\nabla_2 F, \\ \sigma^{12} &= \frac{1}{a}\,\nabla_1\nabla_2\chi_{33} = -\frac{1}{a}\,\nabla_1\nabla_2 F, \\ \sigma^{22} &= -\frac{1}{a}\,\nabla_1\nabla_1\chi_{33} = \frac{1}{a}\,\nabla_1\nabla_1 F. \end{aligned} \tag{35'''}$$

Für Transformationen zwischen verschiedenen Arten von Zylinderkoordinaten (einschließlich den kartesi-

[17] In der quadratischen Näherung darf g^{pq} durch a^{pq} ersetzt werden, was eine wesentliche Vereinfachung für die Berechnung von $Q_1{}^{ij}$ bedeutet.

[18] Manche der nachfolgenden Formeln, z. B. (35), gelten auch für $a_{12} \neq 0$!

schen Koordinaten x, y, z) ist der Index 3 invariant und darf deshalb stets ohne weiteres heruntergezogen werden. Ferner können wir die Größen $-\chi_{33} = F$ (AIRYsche Spannungsfunktion) und

$$-(\nabla_1 \chi_{23} - \nabla_2 \chi_{13})/\sqrt{a} = -(\partial_1 \chi_{23} - \partial_2 \chi_{13})/\sqrt{a} = -\epsilon^{3lk} \nabla_l \chi_{k3} = \Phi$$

(Spannungsfunktion der Torsion), sowie σ_{33} als Skalare behandeln.

Das HOOKEsche Gesetz, der lineare Teil von (11), nimmt mit (34) und (35) die Gestalt an

$$\varepsilon^0_{33} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma^0_{33} - \frac{\nu}{1+\nu}(\Delta F^0 + \sigma^0_{33})\right] = \frac{1}{E}(\sigma^0_{33} - \nu\,\Delta F^0), \tag{36'}$$

$$\varepsilon^0_{23} = -\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,\partial_1 \Phi^0, \quad \varepsilon^0_{13} = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,\partial_2 \Phi^0, \tag{36''}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{11} &= \frac{a_{11}}{2\mu}\left[\frac{\nabla_2 \nabla_2 F^0}{a_{22}} - \frac{\nu}{1+\nu}(\Delta F^0 + \sigma^0_{33})\right], \\ \varepsilon^0_{12} &= -\frac{1}{2\mu}\nabla_1 \nabla_2 F^0, \\ \varepsilon^0_{22} &= \frac{a_{22}}{2\mu}\left[\frac{\nabla_1 \nabla_1 F^0}{a_{11}} - \frac{\nu}{1+\nu}(\Delta F^0 + \sigma^0_{33})\right]. \end{aligned} \tag{36'''}$$

Der Operator $\nabla^l \nabla_l$ von (26) ist gleich dem LAPLACEschen Operator Δ. Damit schreiben sich die Gln. (30) für das ebene Problem

$$\sigma^0_{33} = \nu\,\Delta F^0 + E\,\varepsilon^0_{33}, \tag{37'}$$

$$\Delta\Phi^0 = 2\mu\,\zeta, \tag{37''}$$

$$\Delta\,\Delta F^0 = -\frac{2\mu}{1-\nu}\,\eta'. \tag{37'''}$$

Für ε^0_{33}, ζ und η' erhält man aus (27) mit (36) die Bestimmungsgleichungen [19]

$$\begin{aligned} -\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon^0_{33} &= \sqrt{a}\,\nabla_1 \alpha^{2}_{\cdot 3}, \\ \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon^0_{33} &= \frac{\sqrt{a}}{2}(\nabla_1 \alpha^{1}_{\cdot 3} - \nabla_2 \alpha^{2}_{\cdot 3}), \\ -\nabla_2 \nabla_2 \varepsilon^0_{33} &= -\sqrt{a}\,\nabla_2 \alpha^{1}_{\cdot 3}, \end{aligned} \tag{38'}$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \zeta &= -\tfrac{1}{2}[\nabla_1(\alpha_{33} - \alpha^{2}_{\cdot 2}) + \nabla_2 \alpha^{2}_{\cdot 1}], \\ \nabla_2 \zeta &= -\tfrac{1}{2}[\nabla_2(\alpha_{33} - \alpha^{1}_{\cdot 1}) + \nabla_1 \alpha^{1}_{\cdot 2}], \end{aligned} \tag{38''}$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{a}}(\partial_2 \alpha_{31} - \partial_1 \alpha_{32}) + \nu\left(\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,\nabla_1 \alpha^{2}_{\cdot 3} - \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,\nabla_2 \alpha^{1}_{\cdot 3}\right). \tag{38'''}$$

Nach der Integration von (37) kann der zweite Näherungsschritt beginnen. Die Gln. (31) bekommen die Form

$$\sigma^1_{33} = \nu\,\Delta F^1 + E\,(Q' - \varepsilon^Q_{33}), \tag{39'}$$

$$\Delta\Phi^1 = 2\mu\left[\frac{1}{\sqrt{a}}(\partial_1 \varepsilon^Q_{23} - \partial_2 \varepsilon^Q_{13}) + Q''\right], \tag{39''}$$

$$\begin{aligned} \Delta\,\Delta F^1 = -\frac{2\mu}{1-\nu}\Big[&\frac{1}{a}(\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon^Q_{22} + \nabla_2 \nabla_2 \varepsilon^Q_{11} \\ &- 2\nabla_1 \nabla_2 \varepsilon^Q_{12}) + Q_{33} \\ &+ \nu(\Delta\,\varepsilon^Q_{33} + a_{11} Q^{11} + a_{22} Q^{22})\Big], \end{aligned} \tag{39'''}$$

wobei sich Q' und Q'' aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_1 Q' = -a\,Q^{22}, \quad \nabla_2 \nabla_2 Q' &= -a\,Q^{11}, \\ \nabla_1 \nabla_2 Q' &= a\,Q^{12}, \end{aligned} \tag{40'}$$

$$\nabla_2 Q'' = \sqrt{a}\,Q^{13}, \quad \nabla_1 Q'' = -\sqrt{a}\,Q^{23} \tag{40''}$$

bestimmen. Einfachheitshalber haben wir an den Q-Größen überall den Index 1 weggelassen.

Wir stellen nun noch die zur Berechnung der Q^{ij} nach Gl. (29) benötigten Γ_{mlk} für das ebene Problem zusammen [20].

$$\begin{aligned} &\Gamma_{3lk} = 0, \\ &\Gamma_{111} = -\nabla_1 \varepsilon^0_{11}, \quad \Gamma_{211} = -\nabla_2 \varepsilon^0_{11}, \\ &\Gamma_{122} = -\nabla_1 \varepsilon^0_{22}, \quad \Gamma_{222} = -\nabla_2 \varepsilon^0_{22}, \\ &\Gamma_{121} = -\nabla_2 \varepsilon^0_{11} - \sqrt{a}\,\alpha_{31}, \\ &\Gamma_{212} = -\nabla_1 \varepsilon^0_{22} + \sqrt{a}\,\alpha_{32}, \\ &\Gamma_{112} = -2\nabla_1 \varepsilon^0_{12} + \nabla_2 \varepsilon^0_{11} + \sqrt{a}\,\alpha_{31}, \\ &\Gamma_{221} = -2\nabla_2 \varepsilon^0_{12} + \nabla_1 \varepsilon^0_{22} - \sqrt{a}\,\alpha_{32}; \end{aligned} \tag{41'}$$

$$\Gamma_{133} = \sqrt{a}\,\alpha^{2}_{\cdot 3}, \quad \Gamma_{233} = -\sqrt{a}\,\alpha^{1}_{\cdot 3}; \tag{41''}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{113} &= -2\nabla_1 \varepsilon^0_{13} - \sqrt{a}\,\alpha^{2}_{\cdot 1}, \\ \Gamma_{213} &= -2\nabla_2 \varepsilon^0_{13} + \sqrt{a}\,\alpha^{1}_{\cdot 1}, \\ \Gamma_{123} &= -2\nabla_1 \varepsilon^0_{23} - \sqrt{a}\,\alpha^{2}_{\cdot 2}, \\ \Gamma_{223} &= -2\nabla_2 \varepsilon^0_{23} + \sqrt{a}\,\alpha^{1}_{\cdot 2}; \end{aligned} \tag{41'''}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{131} = \sqrt{a}\,\alpha^{2}_{\cdot 1}, \quad \Gamma_{231} = -\sqrt{a}\,\alpha^{1}_{\cdot 1}, \\ \Gamma_{132} = \sqrt{a}\,\alpha^{2}_{\cdot 2}, \quad \Gamma_{232} = -\sqrt{a}\,\alpha^{1}_{\cdot 2}. \end{aligned} \tag{41''''}$$

[19] Wenn in (38) $\alpha^{1}_{\cdot 3} = \alpha^{2}_{\cdot 3} = \text{const}$, $\nabla_1 \zeta = \nabla_2 \zeta = 0$ und $\eta' = 0$ sind, was insbesondere für $\alpha = 0$ der Fall ist, so stellen die Gln. (37) und (38) die in den Spannungsfunktionen ausgedrückten Kompatibilitätsbedingungen des ebenen Problems der linearen Elastizitätstheorie dar: $\nabla_1 \nabla_1 \varepsilon_{33}{}^0 = \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{33}{}^0 = \nabla_2 \nabla_2 \varepsilon_{33}{}^0 = 0$, $\Delta\Phi^0 = \text{const}$, $\Delta\,\Delta F^0 = 0$.

[20] Für $m \neq l \neq k$ sind in (41) die linearisierten Beziehungen [16] mit berücksichtigt, nämlich $\nabla_n \alpha^{n}_{\cdot k} = 0$.

Besonders wichtig ist die Größe

$$Q_{33} = \frac{1}{a}\Big[\frac{1}{a_{11}}(\Gamma_{121}\Gamma_{211} - \Gamma_{111}\Gamma_{221}) + \frac{1}{a_{22}}(\Gamma_{122}\Gamma_{212} - \Gamma_{112}\Gamma_{222}) + (\Gamma_{123}\Gamma_{213} - \Gamma_{113}\Gamma_{223})\Big]. \qquad (42)$$

5. Kontinuierliche Verteilung paralleler Schraubenversetzungen in z-Richtung

In dieser Ziffer behandeln wir den Spezialfall, daß von den Versetzungskomponenten nur $\alpha_{33}(x^1, x^2)$ von Null verschieden ist. Äußere Kräfte sollen nicht in Betracht gezogen werden. Wir beschränken uns also auf das Eigenspannungsproblem. Deshalb verschwindet mit η' auch F^0. Ebenso sind ε^0_{33} und σ^0_{33} gleich Null. Als wesentlich bleibt von den Gl. (37) noch

$$\Delta\Phi^0 = -\mu\,\alpha_{33} + \text{const} \qquad (43)$$

übrig. Nach (43) und (36″) sind dann nur die Komponenten ε^0_{23} und ε^0_{13} des linearisierten Verzerrungstensors von Null verschieden.

Beim Übergang zur zweiten Näherung stellen wir zunächst mit Hilfe der Gln. (41) fest, daß alle Q^{ij} außer Q_{33} verschwinden. Wir bekommen entsprechend (42) und (41)

$$Q_{33} = \frac{4}{a}[\nabla_1\varepsilon^0_{23}\,\nabla_2\varepsilon^0_{13} - \nabla_1\varepsilon^0_{13}\,\nabla_2\varepsilon^0_{23}] = -\frac{1}{a\,\mu^2}[(\nabla_1\nabla_1\Phi^0)(\nabla_2\nabla_2\Phi^0) - (\nabla_1\nabla_2\Phi^0)^2]. \qquad (44)$$

Aus (11) und (35″) folgt

$$\varepsilon^Q_{33} = -[(\partial_2\Phi^0)^2/a_{22} + (\partial_1\Phi^0)^2/a_{11}]\,C_3, \qquad (45')$$

$$\varepsilon^Q_{23} = \varepsilon^Q_{13} = 0, \qquad (45'')$$

$$\varepsilon^Q_{11} = -\Big[\frac{a_{11}}{a_{22}}(\partial_2\Phi^0)^2 + (\partial_1\Phi^0)^2\Big]C_3 - (\partial_1\Phi^0)^2 C_7,$$
$$\varepsilon^Q_{12} = -(\partial_1\Phi^0)(\partial_2\Phi^0)\,C_7, \qquad (45''')$$
$$\varepsilon^Q_{22} = -\Big[\frac{a_{22}}{a_{11}}(\partial_1\Phi^0)^2 + (\partial_2\Phi^0)^2\Big]C_3 - (\partial_1\Phi^0)^2 C_7.$$

Daraus erhalten wir die Gln. (39) in der Form

$$\sigma^1_{33} = \nu\,\Delta F^1 + E\Big\{Q' + \Big[\frac{(\partial_2\Phi^0)^2}{a_{22}} + \frac{(\partial_1\Phi^0)^2}{a_{11}}\Big]C_3\Big\} \qquad (46') \qquad\qquad \Delta\Phi^1 = \text{const}, \qquad (46'')$$

$$\Delta\Delta F^1 = \frac{2\mu}{1-\nu}\,\frac{1}{a}\Big\{(1+\nu)\,C_3\,\Delta[a_{11}(\nabla_2\Phi^0)^2 + a_{22}(\nabla_1\Phi^0)^2] + C_7[\nabla_1\nabla_1(\nabla_2\Phi^0)^2 + \nabla_2\nabla_2(\nabla_1\Phi^0)^2 - 2\,\nabla_1\nabla_2(\nabla_1\Phi^0)\,(\nabla_2\Phi^0)] + \frac{1}{\mu^2}[(\nabla_1\nabla_1\Phi^0)(\nabla_2\nabla_2\Phi^0) - (\nabla_1\nabla_2\Phi^0)^2]\Big\}, \qquad (46''')$$

wo Q' den Gln. (40′) $\nabla_1\nabla_1 Q' = \nabla_1\nabla_2 Q' = \nabla_2\nabla_2 Q' = 0$ genügt.

6. Die singuläre Schraubenversetzung

Für die folgende Rechnung, die uns in quadratischer Näherung das Spannungsfeld einer Schraubenversetzung in der Achse eines kreisförmigen Hohlzylinders unter Berücksichtigung der Randbedingungen liefern wird, verwenden wir zylindrische Polarkoordinaten r, φ, z. Die von Null verschiedenen Komponenten des Maßtensors und des zugehörigen CHRISTOFFEL-Symbols sind dann

$$a_{11} = 1,\quad a_{22} = r^2,\quad a_{33} = 1,\quad a'^{\,2}_{12\cdot} = \frac{1}{r},\quad a'^{\,1}_{22\cdot} = -r. \qquad (47)$$

Ferner ist $a = a_{11}\,a_{22} = r^2$. Damit erhält man aus (35) [21]

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r},$$
$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad (48)$$
$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \qquad \sigma_{\varphi z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Eine einzelne Schraubenversetzung mit einem BURGERS-Vektor vom Betrag b, die in der z-Achse verläuft, wird durch $\alpha_{zz} = b\,\delta(\mathfrak{r})$ beschrieben. Im unendlich ausgedehnten Medium leitet sich dann das Spannungsfeld der linearen Näherung aus der Spannungsfunktion

$$\Phi^0 = S\ln r, \quad S \equiv -\frac{\mu\,b}{2\pi} \qquad (49)$$

ab. Handelt es sich um eine „fiktive" Versetzung (VOLTERRAsche Distorsion 1. Art) in der Achse eines kreisförmigen Hohlzylinders vom Innen- und Außen-

[21] Die zu den Spannungskomponenten in (48) gehörenden Basisvektoren haben den Betrag 1.

radius r_0 bzw. r_1, so gibt (49) ebenfalls die lineare Näherung. Aus den Gln. (48) folgt nämlich, daß von den Spannungen allein $\sigma^0_{\varphi z} = -S/r$ von Null verschieden ist, während die Randbedingungen das Verschwinden von σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$ und σ_{rz} auf dem Rand verlangen.

Wir können jetzt gleich zum zweiten Näherungsschritt gehen. Aus (46″) folgt zuerst, da wir keine äußeren Kräfte haben, $\Phi^1 = 0$. Das heißt die Schubspannung $\sigma_{\varphi z}$ ändert sich in zweiter Näherung nicht. Wir setzen nun (49) in (46‴) ein und erhalten

$$\Delta\,\Delta F^1 = \frac{4\,H}{r^4} = \frac{H}{2}\,\Delta\,\Delta \ln^2 r,$$
$$H \equiv -\frac{b^2}{32\,\pi^2}\left[8\,\mu + \frac{(1-2\,\nu)}{(1-\nu)}\,(2\,m' + n')\right]. \tag{50}$$

Die einfachste partikuläre Lösung dieser inhomogenen Gleichung ist

$$\overset{*}{F}{}^1 = \tfrac{1}{2}\,H \ln^2 r\,, \tag{51}$$

die jedoch für sich allein die Randbedingungen verletzt. Wir haben daher zu (51) eine im *ganzen* unendlichen Raum biharmonische Funktion zu addieren, welche die Erfüllung der Randbedingungen garantiert. Diese Funktion muß offenbar wie $\overset{*}{F}{}^1$ rotationssymmetrisch sein, d. h. die Form $d_1\,r^2 + d_2 \ln r$ haben, wo d_1 und d_2 Konstante sind.

Wir machen also folgenden Ansatz:

$$F^1 = \frac{H}{2}\ln^2 r + d_1\,r^2 + d_2 \ln r\,. \tag{52}$$

Daraus folgt nach (48)

$$\sigma^1_{rr} = H\,\frac{\ln r}{r^2} + 2\,d_1 + \frac{d_2}{r^2}\,, \qquad \sigma^1_{r\varphi} = 0\,,$$
$$\sigma^1_{\varphi\varphi} = -H\,\frac{\ln r}{r^2} + 2\,d_1 + \frac{1}{r^2}\,(H - d_2)\,. \tag{53}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\sigma^1_{rr}\,(r = r_0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma^1_{rr}\,(r = r_1) = 0\,. \tag{54}$$

Somit wird

$$d_1 = -\frac{H}{2}\,\frac{\ln(r_1/r_0)}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\,, \quad d_2 = -H\,\frac{(r_1{}^2 \ln r_0 - r_0{}^2 \ln r_1)}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)} \tag{55}$$

und über (52) oder (53)

$$\Delta F^1 = \sigma^1_{rr} + \sigma^1_{\varphi\varphi} = \frac{H}{r^2} + 4\,d_1 = H\left[\frac{1}{r^2} - \frac{2\ln(r_1/r_0)}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\right]. \tag{56}$$

Mit (56) und (49) bekommen wir aus (46′) auch σ^1_{zz}, wenn wir noch Q' bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe der Eigenspannungsbedingung [8], daß der Mittelwert von $\sigma_{zz} = \sigma^1_{zz}$ verschwinden muß. Da nun wegen (56) $\overline{\Delta F^1} = 0$ ist, folgt

$$Q' = -2\,C_3\,S^2\,\frac{\ln(r_1/r_0)}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\,. \tag{57}$$

Nun sind wir in der Lage, sämtliche Spannungskomponenten für das behandelte Eigenspannungsproblem in zweiter Näherung zusammenzustellen.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2}\,\frac{H}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\left[r_1{}^2 \ln\frac{r}{r_0} + r_0{}^2 \ln\frac{r_1}{r} - r^2 \ln\frac{r_1}{r_0}\right],\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{H}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\left[r_1{}^2 \ln\frac{r}{r_0} + r_0{}^2 \ln\frac{r_1}{r} + r^2 \ln\frac{r_1}{r_0}\right]\right\},\\
\sigma_{zz} &= \frac{b^2}{4\,\pi^2}\left[-\mu + \frac{1}{4(1-\nu)}\left(-(1-2\,\nu)\,m' + \frac{\nu}{2}\,n'\right)\right]\left[\frac{1}{r^2} - \frac{2}{(r_1{}^2 - r_0{}^2)}\ln\frac{r_1}{r_0}\right],\\
\sigma_{r\varphi} &= \sigma_{rz} = 0\,, \qquad \sigma_{\varphi z} = \frac{\mu\,b}{2\,\pi}\,\frac{1}{r}\,.
\end{aligned} \tag{58}$$

Diese Formeln stimmen mit den entsprechenden, auf andere Weise erhaltenen Ergebnissen [1] überein.

7. Kontinuierliche Verteilung paralleler Stufenversetzungen in z-Richtung

In dem jetzt zu besprechenden Fall sind von den Versetzungskomponenten $\alpha^{k}_{\cdot l}$ nur $\alpha_{31}(x^1, x^2)$ und $\alpha_{32}(x^1, x^2)$ von Null verschieden. Weil äußere Kräfte fehlen, sind ε^0_{23} und ε^0_{13} nach (38″), (37″) und (36″) sowie ε^0_{33} nach (38′) gleich Null. Deshalb reduzieren sich die Gln. (37) auf

$$\sigma^0_{33} = \nu\,\Delta F^0,$$
$$\Delta\,\Delta F^0 = \frac{2\,\mu}{1-\nu}\,\frac{1}{\sqrt{a}}\,(\partial_1\,\alpha_{32} - \partial_2\,\alpha_{31})\,. \tag{59}$$

Hieraus ist F^0 zu bestimmen. Nun gehen wir zur zweiten Näherung und finden wieder, daß alle Q^{ij} außer Q_{33} verschwinden. Aus (42), (41) und (36‴) ergibt sich

$$Q_{33}=\frac{1}{4\mu^2}\Big\{2(1-2\nu)\,\mu\frac{1}{\sqrt{a}}\,(\alpha_{31}\,\Delta F_2{}^0-\alpha_{32}\,\Delta F_1{}^0) + (1-\nu)(1-2\nu)\left[\frac{(\Delta F_1{}^0)^2}{a_{11}}+\frac{(\Delta F_2{}^0)^2}{a_{22}}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a_{11}}(F^0_{111}F^0_{122}-(F^0_{112})^2) + \frac{1}{a_{22}}(F^0_{112}F^0_{222}-(F^0_{122})^2)\right]\Big\}. \tag{60}$$

Hier bedeuten die Indizes bei F^0 kovariante Ableitungen bezüglich der a_{kl}-Metrik, also z. B. $\Delta F_1{}^0 \equiv \nabla_1\,\Delta F^0$ $(=\Delta\nabla_1 F^0)$ oder $F^0_{111}\equiv\ \nabla_1\nabla_1\nabla_1 F^0$. Aus (11), (35‴) und (59) folgt

$$\varepsilon^Q_{33}=[(1+\nu)^2 C_2+\nu\,C_3+\nu(1+\nu)\,C_5](\Delta F^0)^2+(C_3+C_7)\,\frac{1}{a}\left[F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2\right], \tag{61'}$$

$$\varepsilon^Q_{23}=\varepsilon^Q_{13}=0, \tag{61''}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^Q_{11}&=a_{11}(1+\nu)^2 C_2(\Delta F^0)^2+a_{11}C_3\left\{\frac{1}{a}\left[F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2\right]+\nu(\Delta F^0)^2\right\}+\left[(1+\nu)\,C_5\frac{a_{11}}{a_{22}}F^0_{22}+\nu\,C_7F^0_{11}\right]\Delta F^0,\\
\varepsilon^Q_{12}&=[\nu\,C_7-(1+\nu)\,C_5]\,F^0_{12}\,\Delta F^0, \qquad\qquad (61''')\\
\varepsilon^Q_{22}&=a_{22}(1+\nu)^2 C_2(\Delta F^0)^2+a_{22}C_3\left\{\frac{1}{a}\left[F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2\right]+\nu(\Delta F^0)^2\right\}+\left[(1+\nu)\,C_5\frac{a_{22}}{a_{11}}F^0_{11}+\nu\,C_7F^0_{22}\right]\Delta F^0.
\end{aligned}$$

Mit (61) können wir den folgenden in (39) vorkommenden Ausdruck ausschreiben

$$\begin{aligned}
P'&\equiv\left[\frac{1}{a}(\nabla_1\nabla_1\varepsilon^Q_{22}+\nabla_2\nabla_2\varepsilon^Q_{11}-2\nabla_1\nabla_2\varepsilon^Q_{12})+\nu\,\Delta\,\varepsilon^Q_{33}\right]\\
&=[(1+\nu)^3C_2+\nu(1+\nu)\,C_3+(1+\nu)(1+\nu^2)\,C_5]\,\Delta(\Delta F^0)^2\\
&\quad+\frac{1}{a}\Big\{[(1+\nu)\,C_3+\nu\,C_7]\,\Delta\left[F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2\right] \qquad\qquad (62)\\
&\quad+(1+\nu)\,C_5\left[-a\,\Delta F^0\,\Delta\,\Delta F^0+\frac{a_{11}}{a_{22}}F^0_{22}\,\Delta F^0_{22}+\frac{a_{22}}{a_{11}}F^0_{11}\,\Delta F^0_{11}+2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12}\right]\\
&\quad+\nu\,C_7\left[F^0_{11}\,\Delta F^0_{22}+F^0_{22}\,\Delta F^0_{11}-2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12}\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Für $a \neq 1$ ist der in (62) vorkommende Ausdruck $F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2$ nicht invariant. Zur Berechnung von $\Delta[F^0_{11}F^0_{22}-(F^0_{12})^2]$ dient dann die Beziehung

$$\begin{aligned}
\Delta(F_{11}F_{22}-F^2_{12})&=F_{11}\,\Delta F_{22}+F_{22}\,\Delta F_{11}-2\,F_{12}\,\Delta F_{12}\\
&+2\left[\frac{1}{a_{11}}(F_{111}F_{122}-F^2_{112})+\frac{1}{a_{22}}(F_{112}F_{222}-F^2_{122})\right].
\end{aligned} \tag{63}$$

Die Gln. (39) erhalten wir nun zu

$$\sigma^1_{33}=\nu\,\Delta F^1+E\,(Q'-\varepsilon^Q_{33}), \tag{64'}$$

$$\Delta\Phi^1=\text{const}, \tag{64''}$$

$$\Delta\,\Delta F^1=-\frac{2\,\mu}{(1-\nu)}\,(P'+Q_{33}), \tag{64'''}$$

wobei (61′), (60) und (62) eingesetzt zu denken sind und Q' den Bedingungen (40′)

$$\nabla_1\nabla_1 Q'=\nabla_1\nabla_2 Q'=\nabla_2\nabla_2 Q'=0$$

unterworfen ist.

8. Die singuläre Stufenversetzung

Eine einzelne, in der z-Achse verlaufende Stufenversetzung mit einem BURGERS-Vektor vom Betrag b, der in die x-Richtung weist, wird durch $\alpha_{31}=b\,\delta(\mathfrak{r})$ beschrieben. Im unendlichen Medium leitet sich dann das Spannungsfeld der linearen Näherung aus der AIRYschen Spannungsfunktion

$$F^0=A_0\,r\sin\varphi\ln r,\quad A_0\equiv-\frac{\mu\,b}{2\pi(1-\nu)} \tag{65}$$

ab [22]. Handelt es sich wieder um eine „fiktive" Versetzung (VOLTERRAsche Distorsion 1. Art) in der Achse eines kreisförmigen Hohlzylinders vom Innen- und Außenradius r_0 bzw. r_1, so gibt nach TIMPE [23] sowie LEIBFRIED und LÜCKE [24]

[22] J. S. KOEHLER, Phys. Rev. **60**, 397 [1941].
[23] A. TIMPE, Z. Math. Phys. **52**, 348 [1905].
[24] G. LEIBFRIED u. K. LÜCKE, Z. Phys. **126**, 450 [1949].

$$F^0 = A_0\, r \sin\varphi \left[\ln r + \frac{r_0^2 r_1^2}{2R^2}\frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{2R^2}\right], \qquad R^2 \equiv r_0^2 + r_1^2, \tag{66}$$

die Lösung, welche die in Ziff. 6 genannten Bedingungen des freien Randes erfüllt.

Den zweiten Näherungsschritt beginnen wir mit der Feststellung, daß wegen Fehlens von äußeren Kräften aus (64″) $\Phi^1 = 0$ und $\sigma^1_{rz} = \sigma^1_{\varphi z} = 0$ zu entnehmen ist.

In (60) gibt jetzt das Glied mit α_{31} keinen Beitrag [4]. Ferner ist im Hohlzylinder $\Delta\,\Delta F^0 = 0$, woraus

$$F^0_{11}\,\Delta F^0_{22} + F^0_{22}\,\Delta F^0_{11} - 2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12} = -\left[\frac{a_{22}}{a_{11}} F^0_{11}\,\Delta F^0_{11} + \frac{a_{11}}{a_{22}} F^0_{22}\,\Delta F^0_{22} + 2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12}\right] \tag{67}$$

folgt. Wenn wir außerdem noch die Beziehung

$$\Delta(\Delta F)^2 = 2\left[\frac{(\Delta F_1)^2}{a_{11}} + \frac{(\Delta F_2)^2}{a_{22}} + \Delta F\,\Delta\,\Delta F\right] \tag{68}$$

beachten, bekommen wir für (64‴)

$$\Delta\,\Delta F^1 = A_1\,\Delta(\Delta F^0)^2 + \frac{A_2}{a}\left\{\Delta\left[F^0_{11} F^0_{22} - (F^0_{12})^2\right] + F^0_{11}\,\Delta F^0_{22} + F^0_{22}\,\Delta F^0_{11} - 2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12}\right\} \tag{69}$$

mit

$$A_1 = -\frac{2\mu}{(1-\nu)}\left[\frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{8\mu^2} + (1+\nu)^3 C_2 + \nu(1+\nu)\,C_3 + (1+\nu)(1+\nu^2)\,C_5\right]$$
$$= -\frac{1}{4(1-\nu)\,\mu^2}\left[(10\nu^2 - 17\nu + 7)\,\mu - 3(1-2\nu)^3 l' + 3\nu\,(1-\nu)(1-2\nu)\,m'\right]$$

und

$$A_2 = \frac{2\mu}{(1-\nu)}\left[\frac{1}{8\mu^2} - (1+\nu)\,C_3 - \nu\,C_7\right] = \frac{2\mu}{(1-\nu)}\left[-\frac{1}{8\mu^2} + (1+\nu)\,C_5 - \nu\,C_7\right]$$
$$= \frac{1}{4(1-\nu)\,\mu^2}\left[(5-8\nu)\,\mu + (1-2\nu)\,m'\right].$$

Aus (66) folgt $\quad \Delta(\Delta F^0)^2 = \dfrac{8A_0^2}{r^4}\left[1 + 4\dfrac{r^4}{R^4} - 4\dfrac{r^2}{R^2}\cos 2\varphi\right]$ und

$$\frac{1}{a}\left\{\Delta\left[F^0_{11}F^0_{22} - (F^0_{12})^2\right] + F^0_{11}\,\Delta F^0_{22} + F^0_{22}\,\Delta F^0_{11} - 2F^0_{12}\,\Delta F^0_{12}\right\}$$
$$= \frac{4A_0^2}{r^4}\left[\frac{r^4}{R^4} + 1 + 2\frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^2} - 9\frac{r_0^4 r_1^4}{R^4}\frac{1}{r^4} + \cos 2\varphi\left(-5\frac{r^2}{R^2} + 1 + 3\frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^2}\right)\right]. \tag{70}$$

(70) setze man in (69) ein. Die einfachste partikuläre Lösung ist

$$\overset{*}{F}{}^1 = A_0^2\left\{\frac{1}{4}\left(2A_1 + \frac{A_2}{4}\right)\frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{2}(2A_1 + A_2)\ln^2 r + \frac{A_2}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4}\frac{r_0^4 r_1^4}{R^4}\frac{1}{r^4}\right)\right.$$
$$\left. + \ln r \cos 2\varphi\left[\left(2A_1 + \frac{5}{4}A_2\right)\frac{r^2}{R^4} + \frac{A_2}{4}\left(1 - \frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^2}\right)\right]\right\}. \tag{71}$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen dienen passende im ganzen Raum biharmonische Funktionen, die wie in Ziff. 6 zu $\overset{*}{F}{}^1$ hinzuzufügen sind. Aus (71) ist zu erkennen, daß hier erstens Funktionen von r allein in Frage kommen, und zwar dieselben wie bei der Schraubenversetzung. Zweitens brauchen wir noch Funktionen von r mit einem Faktor $\cos 2\varphi$. Bekanntlich sind $r^\lambda \cos\lambda\varphi$, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, Potentialfunktionen und $r^{\lambda+2}\cos\lambda\varphi$ Bipotentialfunktionen. Das gibt mit $\lambda = \pm 2$ vier hier interessierende Funktionen. Insgesamt kommen wir so zu dem Ansatz

$$F^1 = \overset{*}{F}{}^1 + e_1 r^2 + e_2 \ln r + \cos 2\varphi\left(e_3 r^4 + e_4 r^2 + e_5 + \frac{e_6}{r^2}\right). \tag{72}$$

Aus (48), (72) und (71) folgen die Spannungskomponenten

$$\frac{\sigma^1_{rr}}{A_0^2} = \left(2A_1 + \frac{A_2}{4}\right)\frac{r^2}{R^4} + 2e_1 + \frac{1}{r^2}\left[e_2 + (2A_1 + A_2)\ln r\right] + \frac{A_2}{4}\left[-\frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^4} + \frac{r_0^4 r_1^4}{R^4}\frac{1}{r^6}\right]$$
$$+ \cos 2\varphi\left\{\left[(2A_1 + \tfrac{5}{4}A_2)\frac{(1-2\ln r)}{R^2} - 2e_4\right] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{A_2}{4}(1 - 4\ln r) - 4e_5\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^4}\left[-\frac{A_2}{4}\frac{r_0^2 r_1^2}{R^2}(1 - 6\ln r) - 6e_6\right]\right\}, \tag{73}$$

$$\frac{\sigma^1_{r\varphi}}{A_0^2} = 2\sin 2\varphi\left\{3\,e_3\,r^2 + \left[(2\,A_1 + \tfrac{5}{4}\,A_2)\,\frac{(1+\ln r)}{R^2} + e_4\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\left[\frac{A_2}{4}(1-\ln r) - e_5\right] + \frac{1}{r^4}\left[-\frac{A_2}{4}\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}(1-3\ln r) - 3\,e_6\right]\right\},$$

$$\frac{\sigma^1_{\varphi\varphi}}{A_0^2} = 3\left(2\,A_1 + \frac{A_2}{4}\right)\frac{r^2}{R^4} + 2\,e_1 + \frac{1}{r^2}\left[(2\,A_1 + A_2)(1-\ln r) - e_2\right] + \frac{A_2}{4}\left[3\,\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}\frac{1}{r^4} - 5\,\frac{r_0^4\,r_1^4}{R^4}\frac{1}{r^6}\right]$$
$$+\cos 2\varphi\left\{12\,e_3\,r^2 + \left[(2\,A_1 + \tfrac{5}{4}\,A_2)\,\frac{(3+2\ln r)}{R^2} + 2\,e_4\right] - \frac{A_2}{4}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left[\frac{A_2}{4}\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}(5-6\ln r) + 6\,e_6\right]\right\}.$$

Die Randbedingungen lauten: $\sigma^1_{rr} = \sigma^1_{r\varphi} = 0$ für $r = r_0$ und $r = r_1$. Da sowohl der von r allein abhängende Teil von σ^1_{rr} als auch der mit dem Faktor $\cos 2\varphi$ versehene Teil davon die Randbedingungen für sich erfüllen muß, haben wir zusammen 6 Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten $e_1,\ e_2, \ldots$. Das Ergebnis ist

$$e_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(2\,A_1 + \frac{A_2}{4}\right)\frac{1}{R^2} + (2\,A_1 + A_2)\,\frac{\ln(r_1/r_0)}{(r_1^2 - r_0^2)}\right],$$
$$e_2 = 2\left(A_1 + \frac{A_2}{4}\right)\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^4} + (2\,A_1 + A_2)\,\frac{(r_0^2\ln r_1 - r_1^2\ln r_0)}{(r_1^2 - r_0^2)},$$
$$e_3 = \frac{1}{(r_1^2 - r_0^2)^3}\left\{-(A_1 + \tfrac{3}{4}\,A_2)(r_1^2 - r_0^2) + \left[2(2\,A_1 + A_2)\,\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2} + \frac{A_2}{4}\,R^2\right]\ln\frac{r_1}{r_0}\right\}, \tag{74}$$
$$e_4 = \frac{1}{(r_1^2 - r_0^2)^3\,R^2}\left\{(A_1 + \tfrac{3}{4}\,A_2)(r_1^2 - r_0^2)(R^4 + 2\,r_0^2\,r_1^2) + \frac{A_2}{4}\left[r_0^2\,r_1^2 - 2(r_0^4 + r_1^4)\right]R^2\ln\frac{r_1}{r_0}\right.$$
$$\left. + (2\,A_1 + \tfrac{5}{4}\,A_2)\left[r_0^2(r_0^4 + r_0^2\,r_1^2 + 4\,r_1^4)\ln r_0 - r_1^2(r_1^4 + r_0^2\,r_1^2 + 4\,r_0^4)\ln r_1\right]\right\},$$
$$e_5 = \frac{r_0^2\,r_1^2}{(r_1^2 - r_0^2)^3}\left\{-3(A_1 + \tfrac{3}{4}\,A_2)(r_1^2 - r_0^2) + \left[(2\,A_1 + A_2)(R^4 + r_0^4 + r_1^4)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{A_2}{4}(3\,R^4 - 8\,r_0^2\,r_1^2)\right]\frac{\ln(r_1/r_0)}{R^2} + \frac{A_2}{4}\left[(r_0^4 + 3\,r_1^4)\,\frac{\ln r_1}{r_1^2} - (r_1^4 + 3\,r_0^4)\,\frac{\ln r_0}{r_0^2}\right]\right\},$$
$$e_6 = \frac{r_0^4\,r_1^4}{(r_1^2 - r_0^2)^3\,R^2}\left\{2(A_1 + \tfrac{3}{4}\,A_2)(r_1^2 - r_0^2) - (2\,A_1 + \tfrac{7}{4}\,A_2)\,R^2\ln\frac{r_1}{r_0}\right.$$
$$\left. - \frac{A_2}{4}\left[r_1^2\left(3 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\ln r_0 - r_0^2\left(3 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)\ln r_1\right]\right\}.$$

Mit (74) sind die Spannungen (73) vollständig bekannt.

Die einzige noch fehlende Spannungskomponente σ^1_{zz} ist leicht aus (64′) zu gewinnen. Die hierfür benötigten Größen werden jetzt zusammengestellt. Aus (72) oder (73) folgt

$$\frac{\Delta F^1}{A_0^2} = \frac{\sigma^1_{rr} + \sigma^1_{\varphi\varphi}}{A_0^2} = (8\,A_1 + A_2)\,\frac{r^2}{R^4} + (2\,A_1 + A_2)\,\frac{1}{r^2} + 4\,e_1 + A_2\left(\frac{1}{2}\,\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}\,\frac{1}{r^4} - \frac{r_0^4\,r_1^4}{R^4}\,\frac{1}{r^6}\right) \tag{75}$$
$$+\cos 2\varphi\left[12\,e_3\,r^2 + (8\,A_1 + 5\,A_2)\,\frac{1}{R^2} - (A_2\ln r + 4\,e_5)\,\frac{1}{r^2} + A_2\,\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}\,\frac{1}{r^4}\right].$$

Die Formel (61′) schreiben wir etwas ausführlicher

$$E\,\varepsilon^Q_{33} = A_3(\Delta F^0)^2 + \frac{A_4}{a}\left[F^0_{11}\,F^0_{22} - (F^0_{12})^2\right],$$
$$A_3 = \frac{1}{4\,\mu^2}\left[-3(1-2\,\nu)^3\,l' + (1-2\,\nu)\,(-3\,\nu^2 + 4\,\nu - 1)\,m' + \nu(1-\nu)\,(-4\,\mu + n')\right], \tag{76}$$
$$A_4 = \frac{1}{4\,\mu^2}\left[8\,\nu\,\mu - (1-2\,\nu)\,m' - n'\right].$$

Aus (66) bekommen wir

$$\frac{(\Delta F^0)^2}{A_0^2} = 2(1-\cos 2\varphi)\left(\frac{4\,r^2}{R^4} - \frac{4}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$
$$\frac{1}{A_0^2\,a}\left[F^0_{11}\,F^0_{22} - (F^9_{12})^2\right] = \frac{r^2}{R^4} - \frac{1}{R^2} + \frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}\,\frac{1}{r^4} - \frac{r_0^4\,r_1^4}{R^4}\,\frac{1}{r^6} \tag{77}$$
$$+\cos 2\varphi\left[-2\,\frac{r^2}{R^4} + \frac{3}{R^2} - \left(1 + 2\,\frac{r_0^2\,r_1^2}{R^4}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{r_0^2\,r_1^2}{R^2}\,\frac{1}{r^4}\right].$$

Q' muß wieder dafür sorgen, daß der Mittelwert $\overline{\sigma_{zz}} = \overline{\sigma_{zz}^1}$ verschwindet. Das ist bei den hier fehlenden äußeren Kräften die Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung. Mit (75) und (77) ist

$$\overline{\Delta F^1} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{\frac{1}{a}\left[F_{11}^0 F_{22}^0 - (F_{12}^0)^2\right]} = 0 ,$$

deshalb wird

$$E\,Q' = \overline{E\,\varepsilon_{33}^Q} = A_3 \overline{(\Delta F^0)^2} = 4\,A_0^2\,A_3 \left[\frac{\ln(r_1/r_0)}{(r_1^2 - r_0^2)} - \frac{1}{R^2}\right] \tag{78}$$

Wir können nun (78), (77), (76) und (75) in (64′) einsetzen, womit auch σ_{zz}^1 berechnet ist. Die Spannungskomponenten der linearen Theorie ergeben sich natürlich leicht aus (66) und (48).

Die Dilatation erhält man in zweiter Näherung, wenn die oben (bis auf ΔF^0) alle angegebenen Größen

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{I}}^2 &= (1+\nu)^2 (\Delta F^0)^2 , \\ \sigma_{\mathrm{I}} &= (1+\nu)\,\Delta F^0 + \Delta F^1 + \sigma_{zz}^1 \\ \sigma_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{a}\left[F_{11}^0 F_{22}^0 - (F_{12}^0)^2\right] + \nu (\Delta F^0)^2 \end{aligned} \tag{79}$$

in (16) eingesetzt werden. Die mittlere Dilatation ist nach (19), (79) und (78)

$$\overline{\Theta} = u \overline{(\Delta F^0)^2} = 4\,u\,A_0^2 \left[\frac{\ln(r_1/r_0)}{(r_1^2 - r_0^2)} - \frac{1}{R^2}\right] = 4 \frac{\mu}{1-\nu}\,u\,\overline{\psi} , \tag{80}$$

$u = [(1+\nu)^2 s_2 + \nu\,s_3]$, $\overline{\psi} =$ mittlere Energiedichte.

Die vorstehende Gl. (80) ist in etwas anderer Form und unter Vernachlässigung des Gliedes $1/R^2$ auch schon früher [14] angegeben worden.

Falls man sich nur für den Bereich in großem Abstand von den Rändern bei r_0 und r_1 interessiert, dürfen die obenstehenden Formeln durch den Grenzübergang $r_0 \to 0$ und $r_1 \to \infty$ vereinfacht werden. Entsprechend (74) bekommen wir dann zunächst

$$e_1 = e_3 = e_4 = e_6 = 0 \quad \text{und} \quad e_2 = -(2\,A_1 + A_2)\ln r_0 ,$$

$$e_5 = -\frac{A_2}{4}\ln r_0 .$$

Die sich daraus für die Spannungskomponenten in zweiter Näherung (also einschließlich der linearen Spannungen) ergebenden Ausdrücke sind

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A_0 \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{A_0^2}{r^2}\left[(2\,A_1 + A_2)\ln\frac{r}{r_0} + \cos 2\varphi\,\frac{A_2}{4}\left(1 - 4\ln\frac{r}{r_0}\right)\right], \\ \sigma_{r\varphi} &= -A_0 \frac{\cos\varphi}{r} + \frac{A_0^2}{r^2}\frac{A_2}{2}\sin 2\varphi\left(1 - \ln\frac{r}{r_0}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= A_0 \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{A_0^2}{r^2}\left[(2\,A_1 + A_2)\left(1 - \ln\frac{r}{r_0}\right) - \frac{A_2}{4}\cos 2\varphi\right], \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{\varphi z} = 0 , \\ \sigma_{zz} &= 2\,\nu\,A_0 \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{A_0^2}{r^2}\left\{\nu(2\,A_1 + A_2) - 2\,A_3 + \cos 2\varphi\left[(2\,A_3 + A_4) - \nu\,A_2 \ln\frac{r}{r_0}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{81}$$

Die Dilatation in dem genannten mittleren Bereich ist

$$\Theta = (1 - 2\nu)\frac{A_0}{\mu}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{A_0^2}{r^2}\left\{(p_1 + 2\,u) + \cos 2\varphi\left[p_2 - (2\,u + s_3) + p_3 \ln\frac{r}{r_0}\right]\right\},$$

[u wie in (80), wegen s_1, s_2 und s_3 siehe (16)],

$$\begin{aligned} p_1 &= [(1+\nu)(2\,A_1 + A_2) - 2\,A_3]\,s_1 \\ &= -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu^2)}\frac{1}{8\,\mu^3}\left[(12\,\nu^3 + 10\,\nu^2 - 25\,\nu + 9)\,\mu - 12(1-2\nu)^3\,l'\right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu)(-14\,\nu^2 + 15\,\nu - 3)\,m' + 2\,\nu(\nu^2 - 2\,\nu + 1)\,n'\right], \\ p_2 &= (2\,A_3 + A_4)\,s_1 = \frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)}\frac{1}{8\,\mu^3}\left[8\,\nu^2\,\mu - 6(1-2\nu)^3\,l'\right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu)(-6\,\nu^2 + 8\,\nu - 3)\,m' + (-2\,\nu^2 + 2\,\nu - 1)\,n'\right], \\ p_3 &= -(1+\nu)\,A_2\,s_1 = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{1}{8\,\mu^3}\left[(5 - 8\,\nu)\,\mu + (1-2\nu)\,m'\right]. \end{aligned} \tag{82}$$

Gl. (82) bildet den Ausgangspunkt für die Berechnung des elektrischen Widerstands von Stufenversetzungen in Metallen [25], bei der sich die „linearen" und die „quadratischen" Beiträge zu Θ als gleich wichtig

[25] A. SEEGER u. H. BROSS, Z. Naturforschg. **15 a**, 663 [1960].

erweisen. In der eben genannten Arbeit finden sich auch numerische Angaben über die hier auftretenden Konstanten im Falle des Kupfers.

Anhang

Einige in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Bezeichnungen aus dem allgemeinen Tensorkalkül sollen hier kurz erklärt werden. Ausführliche Darstellungen mit allen nötigen Beweisen bringen die Lehrbücher der Tensorrechnung [26]. In krummlinigen Koordinaten x^k läßt sich das Quadrat der Entfernung zweier unmittelbar benachbarter Punkte als quadratische Form der Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x^k$ darstellen. Man schreibt abgekürzt $\mathrm{d}s^2 = a_{kl}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l$, wobei über die gleichen Indizes summiert wird. Diese Summationskonvention haben wir auch in allen anderen Gleichungen dieser Arbeit angenommen, in denen solche Summen vorkommen. Da $\mathrm{d}x^k$ die Komponenten des zwei Nachbarpunkte verbindenden Vektors sind, andererseits die Entfernung zwischen diesen Punkten vom Koordinatensystem unabhängig, d. h. invariant ist, stellen die Koeffizienten a_{kl} der quadratischen Form nach einer geläufigen Definition die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe dar. Man nennt sie die *kovarianten Komponenten des Maßtensors.* Offenbar legt dieser Tensor in unmittelbarer Umgebung eines Punktes die dem zugehörigen Koordinatensystem entsprechende Metrik fest.

Nach seiner Definition ist der Maßtensor symmetrisch und vom Orte abhängig. Die zugehörigen (mit oberen Indizes geschriebenen) kontravarianten Komponenten des Maßtensors bestimmen sich aus den Gleichungen $a_{ik}\,a^{jk} = \delta_i^j$. Mit Hilfe des Maßtensors lassen sich die ko- und kontravarianten Komponenten eines beliebigen Tensors ineinander umrechnen, was in der üblichen, auch hier benützten Schreibweise auf ein Heben oder Senken der betreffenden Indizes hinausläuft. Beispielsweise gilt für einen beliebigen Tensor zweiter Stufe

$$t^{ij} = a^{ik}\, t_{k\cdot}^{\;\,j} = a^{jk}\, t^{i}_{\cdot k} = a^{ik}\, a^{jl}\, t_{kl} \tag{83'}$$

oder

$$t_{ij} = a_{ik}\, t^{k}_{\cdot j} = a_{jk}\, t_{i\cdot}^{\;k} = a_{ik}\, a_{jl}\, t^{kl}. \tag{83''}$$

Bei der (Euklidischen) Parallelverschiebung [27] eines in einem krummlinigen Koordinatensystem x^k gegebenen Vektors müssen sich dessen Komponenten v^k wegen der ortsabhängigen Metrik natürlich ändern. Man definiert nun das sogenannte absolute Differential eines Vektors durch die Beziehungen

$$\delta v^k \equiv \mathrm{d}v^k + \overset{\prime}{a}{}_{ml\cdot}^{\;\;k}\, v^l\, \mathrm{d}x^m \tag{84'}$$

oder

$$\delta v_k \equiv \mathrm{d}v_k - \overset{\prime}{a}{}_{mk\cdot}^{\;\;l}\, v_l\, \mathrm{d}x^m \tag{84''}$$

je nachdem, ob die kontra- oder kovarianten Komponenten des Vektors benützt werden. $\mathrm{d}v^k$ ist das totale Differential im üblichen Sinn:

$$\mathrm{d}v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^m}\,\mathrm{d}x^m \equiv \partial_m\, v^k\, \mathrm{d}x^m. \tag{85}$$

Die in den ersten beiden Indizes symmetrischen Größen $\overset{\prime}{a}{}_{ml\cdot}^{\;\;k}$ sind die sog. Christoffel-Symbole zweiter Art

$$\overset{\prime}{a}{}_{ml\cdot}^{\;\;k} = a^{ik}\,\overset{\prime}{a}_{mli}\,;\ \overset{\prime}{a}_{mli} \equiv \tfrac{1}{2}\,(\partial_m\, a_{il} + \partial_l\, a_{mi} - \partial_i\, a_{lm}). \tag{86}$$

An der Definition des absoluten Differentials ist entscheidend, daß es verschwindet, wenn die zu zwei um $\mathrm{d}x^k$ auseinander liegenden Punkten gehörigen Vektoren v^k durch (Euklidische) Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.

Von den Formeln (84) ausgehend wird die kovariante Differentiation (Symbol ∇_m) eines Vektors definiert:

$$\nabla_m\, v^k \equiv \partial_m\, v^k + \overset{\prime}{a}{}_{ml\cdot}^{\;\;k}\; v^l\,, \quad \nabla_m\, v_k \equiv \partial_m\, v_k - \overset{\prime}{a}{}_{mk\cdot}^{\;\;l}\, v_l\,. \tag{87}$$

Verallgemeinert auf einen Tensor $P^{kl\cdot}_{\;\;\;m}$ gilt z. B.

$$\nabla_n\, P^{kl\cdot}_{\;\;\;m} \equiv \partial_n\, P^{kl\cdot}_{\;\;\;m} + \overset{\prime}{a}{}_{np\cdot}^{\;\;k}\, P^{pl\cdot}_{\;\;\;m} + \overset{\prime}{a}{}_{np\cdot}^{\;\;l}\, P^{kp\cdot}_{\;\;\;m} - \overset{\prime}{a}{}_{nm\cdot}^{\;\;p}\, P^{kl\cdot}_{\;\;\;p}\,. \tag{88}$$

Wie man leicht nachrechnet, ergibt die kovariante Differentiation des Maßtensors Null. Daher darf die Reihenfolge der Operationen „kovariante Differentiation“ „Heben oder Senken von Indizes“ vertauscht werden. Das entsprechende gilt *nicht* für die gewöhnliche Differentiation. Also darf z. B. die Gleichung $A_{ml\cdot}^{\;\;k} = \nabla_m\, t_{l\cdot}^{\,k}$ auch $A_{mlk} = \nabla_m\, t_{lk}$ geschrieben werden, dagegen folgt aus $B_{ml\cdot}^{\;\;k} = \partial_m\, t_{l\cdot}^{\,k}$ nicht $B_{mlk} = \partial_m\, t_{lk}$.

Die Anwendung der Formeln (83) in den Gleichungen der vorliegenden Arbeit ist an einer Stelle unzulässig: Aus der Ableitung der Grundgleichung (22) folgt, daß der Zusammenhang zwischen g^{kl} und g_{kl} durch $g^{pq}\, g_{qr} = \delta_r^p$ gegeben ist, so daß nicht etwa, wie aus (83) folgen würde, $a_{ip}\, a_{jq}\, g^{pq} = g_{ij}$ gilt. Die in Gl. (22) oben stehenden Indizes p und q sind also kontravariant in bezug auf die Metrik g_{kl} des natürlichen Zustands, nicht etwa in bezug auf die Metrik a_{kl} des deformierten Zustands. Betrachtet man nur die quadratische Näherung, so darf in Gl. (29) wegen der Kleinheit von ε_{kl} in $g_{kl} = a_{kl} - 2\,\varepsilon_{kl}$ g^{pq} durch a^{pq} ersetzt werden; die oben erwähnte Komplikation entfällt dann.

Wir schließen mit einer kurzen Erläuterung des von uns öfter verwendeten total antisymmetrischen Tensors

[26] Zu unserer Darstellung vgl. insbes. J. A. Schouten, Ricci Calculus, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954, Kap. III, §§ 1—5.

[27] Bei der *Ableitung* der Grundgleichungen der Eigenspannungsbestimmung müssen auch nicht-Euklidische (Levi-Civitasche) Parallelverschiebungen im natürlichen Zustand (Ziffer 3) betrachtet werden. Bei der von uns vorgeschlagenen *Auswertung* dieser Gleichungen ist dies dagegen nicht mehr nötig, da diese sich ganz im Euklidischen deformierten Zustand abspielt. An den natürlichen Zustand erinnert in Gl. (22) vor allem noch g^{pq}, das eine besondere Behandlung erfordert (s. u.).

dritter Stufe (LEVI-CIVITA-Tensor). Alle Komponenten dieses Tensors verschwinden, wenn mindestens zwei der Indizes gleich sind. Stellt die Indexfolge ikl in ϵ^{ikl} bzw. ϵ_{ikl} eine gerade Permutation der Zahlenfolge 1, 2, 3 dar, so erhält die entsprechende Tensorkomponente den Wert $|a^{kl}|^{1/2}$ bzw. $|a_{kl}|^{1/2}$. Bei ungerader Permutation hat man entsprechend $-|a^{kl}|^{1/2}$ bzw. $-|a_{kl}|^{1/2}$. $|a_{kl}| \equiv a$ und $|a^{kl}| = 1/a$ sind die aus den ko- und kontravarianten Komponenten des Maßtensors gebildeten Determinanten. Mit Hilfe des LEVI-CIVITA-Tensors läßt sich z. B. der Rotor eines Vektors $(\nabla \times \mathfrak{v})$ als $\epsilon^{ikl} \nabla_k v_l$ darstellen. Der letzte Ausdruck ist wegen der Symmetrie von $a_{ml}'^{k}$ in m, l gleich $\epsilon^{ikl} \partial_k v_l$.

Die Verfasser danken den Freunden der Technischen Hochschule Stuttgart und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung ihrer Arbeiten.

Gitterdeformationen um Zwischengitteratome, Leerstellen, Zwischengitteratom-Paare und Frenkel-Paare in Kupfer

Von K. H. BENNEMANN und L. TEWORDT

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster i. W.

(Z. Naturforschg. **15 a**, 772—782 [1960]; eingegangen am 4. Juli 1960)

The distortions of the lattice around a number of different point defects in copper are calculated with the help of the electronic digital computer Z 22 using a general method developed by TEWORDT [3]. In the case of an interstitial which is sited at the center of an elementary cube about 500 atoms and in the case of a vacancy about 50 atoms are treated as discrete particles. The elastic solutions which are joined to the displacements of the discrete particles are determined for an anisotropic continuum. The changes in volume of the crystal arising from the interstitial are found to be 0.911, 1.219 and 1.441 atomic volumes respectively for the MORSE potential V_M and the two BORN–MAYER potentials V_1, V_2 we have used [see Eqs. (25) — (27)]. The corresponding values for the vacancy are -0.441, -0.378 and -0.321 atomic volumes. Further we caluclate the relaxation of the lattice around three configurations of interstitial pairs with axes in the (1, 0, 0), (1, 1, 0) and (1, 1, 1) directions considering about 100 atoms as movable in each case. The contributions to the binding energies arising from the potential V_1 turn out to be 0.81, -0.18 and -0.26 eV respectively. This strongly indicates that interstitial pairs can attract one another. Finally the stability of the 10 closest interstitial-vacancy pairs (FRENKEL pairs) is examined. All pairs smaller than 1.5 lattice constants in diameter are found to be instable, the other pairs are stable and give a discrete spectrum of BORN–MAYER energies. The results are discussed in connection with recent experiments in the field of radiation damage.

Durch verschiedene experimentelle Methoden wie Kaltverformung, Abschrecken und Bestrahlung bei niedrigen Temperaturen mit energiereichen Teilchen (Deuteronen, Elektronen, Neutronen) erzeugt man in Edelmetallen Gitterfehler. Beim Aufwärmen werden diese Fehler durch Erholungsprozesse nach und nach wieder beseitigt. In den letzten Jahren wurde in einer Reihe von Experimenten versucht, diese Erholungsprozesse zu analysieren. Besonders sei hier Bezug genommen auf die von MAGNUSON–PALMER–KOEHLER [1] sowie CORBETT–WALKER–SMITH [2] ausgeführten Versuche, in denen Kupfer bei etwa 10 °K mit Deuteronen bzw. Elektronen bestrahlt und anschließend die Erholung des Kristalls von den Gitterfehlern in der Temperaturzone 10° bis 65 °K, üblicherweise als Erholungszone 1 bezeichnet, eingehend untersucht wurde. Dabei beobachtete man ein Spektrum von Erholungsprozessen mit diskreten Aktivierungsenergien. Die ersten beim Aufwärmen eintretenden Prozesse besitzen gemeinsame charakteristische Eigenschaften, die darauf hinweisen, daß es sich hier um eine direkte Rekombination von engen FRENKEL-Paaren handelt. Die anschließenden restlichen Erholungen in der Zone 1 sollen in der Rekombination von im Gitter sich frei bewegenden Zwischengitteratomen mit immobilen Leerstellen bestehen. Jedoch ergibt sich aus den Versuchen, daß diese wandernden Zwischengitteratome nur teilweise mit Leerstellen rekombinieren. Man nimmt an, daß der Rest mit anderen Zwischengitteratomen Komplexe bildet, im einfachsten Falle Paare, die schwer beweglich sind und die die Erholung in Zone 1 überleben.

Die bei der Erholung in der Zone 1 sich abspielenden Vorgänge sind grundlegend wichtig und auch der Schlüssel zum Verständnis der Erholungsmecha-

[1] G. D. MAGNUSON, W. PALMER u. J. S. KOEHLER, Phys. Rev. **109**, 1990 [1958].

[2] J. W. CORBETT, R. M. WALKER u. R. B. SMITH, Phys. Rev. **114**, 1452 [1959].